

Abb. 6 sind die Funktionen  $1/\tau$  über  $n/n_i$  für die verschiedenen besprochenen  $a$ -Werte aufgetragen.

Man sieht, daß für  $a \leq 1/2 n_i$  im Falle von *Dichteverarmung* unsere Annahme eines konstanten  $1/\tau$  näherungsweise richtig ist, und zwar gilt das um so besser, je näher  $a$  bei  $1/2 n_i$  liegt. Jedoch wächst  $1/\tau$  bei *Dichteüberhöhung* schnell mit  $n/n_i$  an. Danach ist es fraglich, ob unsere berechneten Dichteüberhöhungen für kleine Oberflächen-Rekombinationsgeschwindigkeiten  $s$  und hohe Felder den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen. Denn es ergeben sich nahe der Oberfläche  $y = +b/2$  extrem große Dichteüberhöhungen, für welche nach Abb. 6 die Annahme eines linearen Volumen-Rekombinationsgesetzes auch nicht mehr annähernd gerechtfertigt ist. Eine wesentliche Verbesserung der Theorie dürfte in diesem Falle erreicht werden, wenn an Stelle eines linearen *Oberflächen-Rekom-*

binationsgesetzes, wie wir es angesetzt haben, ein quadratisches angenommen wird (also  $U_s = (s/2 n_i)(n^2 - n_i^2)$ ). Dieses wird für große Dichteüberhöhungen an der Anreicherungsseite  $y = +b/2$  der physikalischen Wirklichkeit besser angemessen sein. Auf diese Weise wird die Dichteüberhöhung bei  $y = +b/2$  stark herabgedrückt und ein lineares Volumen-Rekombinationsgesetz erhält nach Abb. 6 wieder approximative Gültigkeit. Wir müssen aber hier darauf verzichten, die Theorie des Sperrschichteffektes unter diesen Annahmen (quadratisches Oberflächen- und lineares Volumen-Rekombinationsgesetz, wodurch lediglich die Randbedingungen der Diff.-Gl. (7) modifiziert werden) neu zu entwickeln. Qualitativ läßt sich sofort sagen, daß die Strom-Spannungs-Kennlinien in Sperrichtung sich kaum ändern werden, daß aber die Flußströme weniger stark ansteigen werden.

## Magnetische Sperrschichten in Germanium II

Von E. WEISSHAAR \*

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckert-Werke AG Erlangen

(Z. Naturforschg. 10a, 488—495 [1955]; eingegangen am 4. Juni 1955)

Es werden experimentell gemessene Strom-Spannungskennlinien symmetrischer und unsymmetrischer magnetischer Sperrschichten<sup>1</sup> aufgezeigt und deren Abweichungen von dem theoretisch zu erwartenden Verlauf diskutiert. Insbesondere ergibt sich, daß das Ausbleiben eines Sättigungsstromes auf den Störstellengehalt des verwendeten Germaniums zurückzuführen ist. Weiterhin wird über Messungen des zeitlichen Auf- und Abbaus, sowie des Frequenzverhaltens berichtet. Für den Fall kleiner angelegter Felder konnte in allen Fällen eine sehr gute Übereinstimmung mit den theoretischen Berechnungen erzielt werden.

### I. Stationärer Fall der magnetischen Sperrschicht

#### 1. Impulsmethode zur Kennlinienmessung

In einer früheren Arbeit<sup>2</sup> wurden bereits oszillographisch aufgenommene Strom-Spannungskennlinien an magnetischen Sperrschichten in Germanium mitgeteilt. Es war damals darauf hingewiesen worden, daß durch die Eigenerwärmung der Probe bei Feldstärken  $> 10$  V/cm eine Verfälschung des Meßergebnisses eintritt. Da eine Kühlung des Präparates durch Einbettung oder Umspülen mit einer Kühlflüssigkeit wegen der möglichen Beeinflussung der sehr empfindlichen geätzten Oberfläche des Germaniums zunächst ungünstig erschien, wurde zur Kennlinienmessung eine Impulsmethode angewandt. Das Prinzip der Methode zeigt Abb. 1. Der Strom für die Probe wird von

einem Impulsgenerator geliefert. Den Einsatz des Impulses bestimmt ein Synchronisationssignal, das vom Oszillographen bei Beginn der Zeitablenkung ausgesandt wird. Der Impulsgenerator gestattet eine Verzögerung des Meßimpulses gegenüber dem Synchronisationsimpuls, so daß auch der Impulsanstieg auf dem Schirm des Braunschen Rohres

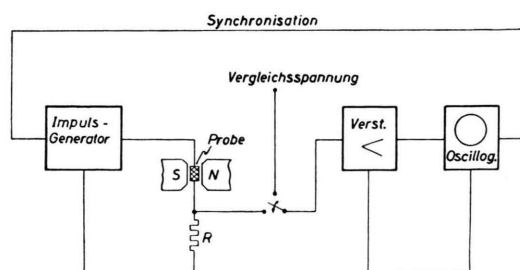


Abb. 1. Blocksaltbild der Impulsapparatur zur Messung der Strom-Spannungskennlinien.

\* Auszug aus Dissertation, Freiburg i. Br.

<sup>1</sup> Der Begriff der magnetischen Sperrschicht wird erstmals definiert in: H. Welker, Z. Naturforschg. 6a, 4, 184 [1951].

<sup>2</sup> E. Weißhaar u. H. Welker, Z. Naturforschg. 8a, 681 [1953].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

sichtbar ist. Der Strom durch die Probe wird gemessen durch dessen Spannungsabfall an R. Die Größe des Spannungsabfalls und die Gesamtspannung an der Probe wird auf dem Oszillographenschirm gemessen durch Vergleich mit einer bekannten Spannung.

Die Impulsdauer wurde immer so gewählt, daß der vollständige Aufbau der magnetischen Sperrschicht, also der stationäre Wert, erreicht wurde und zwar, je nach Größe der angelegten Felder, 10–250  $\mu\text{sec}$ .

Bevor auf die Meßergebnisse eingegangen wird, sei kurz einiges zur Herstellung der Proben gesagt.

Mit Hilfe einer Diamantsäge wurden aus eigenleitenden Germanium-Einkristallen quaderförmige Stücke mit der Dimension ca.  $0,7 \times 0,6 \times 0,1$  cm herausgesägt. Diese erhielten dann an den beiden Schmalseiten sperrfreie Kontakte, zum Beispiel durch elektrolytisches Aufbringen von Rhodium oder Kupfer, oder durch Verzinnen mit reinem Zinn. Nach Abdeckung der Elektroden mit Paraffin erfolgte zur Verminderung der Oberflächenrekombination eine Ätzbehandlung, wobei im wesentlichen die Ätzlösungen CP4 und WAg<sup>3</sup> Verwendung fanden. Nach dem Ätzen wurde die Paraffinschutzschicht wieder entfernt.

Zur Erzielung einer großen Oberflächenrekombination an der einen Seite, also Realisierung der unsymmetrischen magnetischen Sperrschicht, erfolgte nachträglich eine Aufräuhung dieser Seite mit Schmirgelpapier mittlerer Körnung.

## 2. Bestimmung der Rekombinationskonstanten $\tau$ und $s$ .

Um Auskunft über die Volumenrekombination des verwendeten Germaniums zu erlangen, wurde  $\tau$  nach der Methode von Navon, Bray und Fan<sup>4</sup> bestimmt. Ferner wurde mit dieser Methode die Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit  $s$  gemessen und zwar durch Messung der Rekombinationszeit injizierter Ladungsträger an einem im Vergleich zur Diffusionslänge großen Kristall  $\tau_v$ , und der Rekombinationszeit an der daraus geschnittenen Probe  $\tau_0$ .

Nach <sup>3</sup> [Gl. (20)] ergibt sich dann für  $s$ :

$$s = \left[ D \left( \frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_v} \right) \right]^{1/2} \operatorname{tg} \left\{ \frac{\bar{x}_0}{2} \left[ \frac{1}{D} \left( \frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_v} \right) \right]^{1/2} \right\};$$

$D$  ist für den eigenleitenden Fall die ambipolare Diffusionskonstante und hat für Germanium den Wert:  $D = 60 \text{ cm}^2/\text{sec}$ .

$\bar{x}_0$  ist die Dicke der Probe, an der das  $\tau_0$  ermittelt wurde, unter Berücksichtigung der endlichen Breite und Länge.

<sup>3</sup> J. P. McKelvey u. R. L. Longini, J. Appl. Phys. **25**, 634 [1954].

Diese Messungen ergaben, daß bei einer Ätzung mit CP4 und WAg für die im folgenden behandelten Proben im Mittel  $s = 100 \text{ cm/sec}$  gesetzt werden kann.

Für geschliffene Oberflächen ergab sich ein Wert von  $s \geq 20000 \text{ cm/sec}$ .

## 3. Strom-Spannungs-Kennlinien

Aus einer größeren Anzahl gemessener Kennlinien seien 3 charakteristische Beispiele herausgegriffen. Abb. 2 stellt die Kennlinie einer Probe dar (Probe 1), die auf die vorhin beschriebene Weise hergestellt wurde, mit der Dimension  $0,7 \times 0,5 \times 0,1 \text{ cm}$ . Die Lebensdauermessung ergab  $\tau_0 = 120 \mu\text{sec}$ .

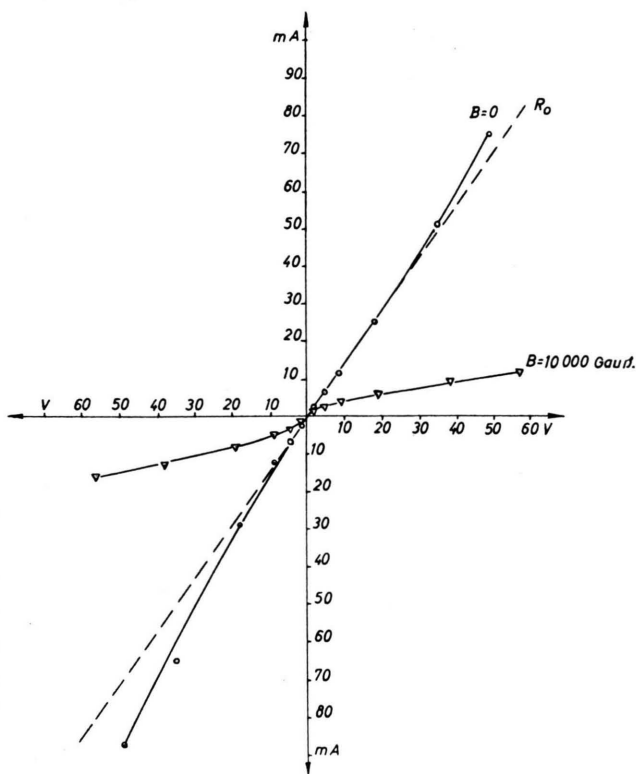


Abb. 2. Strom-Spannungs-Kennlinie einer symmetrischen magnetischen Sperrschicht (Probe 1).

Es zeigt sich, daß der Widerstand der Probe im Magnetfeld bei 60 V etwa das 4,5-fache von  $R_0$  beträgt.

Die Kennlinie ohne Magnetfeld weist ebenfalls eine Abweichung vom Ohmschen Gesetz auf. Die

<sup>4</sup> D. Navon, R. Bray u. H. Y. Fan, Proc. Instn. Radio Engrs. Aust. **40**, 1342 [1952].

zeitliche Konstanz des Meßwertes schloß eine Zunahme der Leitfähigkeit der Probe infolge Erwärmung aus. Es ist jedoch bekannt (vgl. <sup>4,5,6</sup>), daß beim Anlegen genügend großer Feldstärken auch an „sperrfreien“ Flächenelektroden eine Injektion von Ladungsträgern stattfindet. Die Größe der Injektion in Abb. 2 stimmt mit Messungen von Many<sup>5</sup> überein. Diese Injektion an den Elektroden ist auf die Kennlinie der magnetischen Sperrschicht praktisch ohne Einfluß. (Beim Vergleich mit der Theorie wird gezeigt, daß der Anstieg der

schnelles Absinken des Injektionsverhältnisses statt und es verschwindet praktisch bei ca. 200° K. Da die magnetische Sperrschicht ebenso wie eine Temperaturerniedrigung die Verminderung der Zahl der Ladungsträger bewirkt, scheint der Vergleich mit den Messungen von Many gerechtfertigt und es ist somit auch keine Injektion bei aufgebauter magnetischer Sperrschicht zu erwarten.

Eine weitere symmetrische magnetische Sperrschicht ist in Abb. 3 (Probe 2) aufgezeigt. Die Dimensionen des Kristalls sind:  $0,7 \times 0,54 \times 0,09$  cm

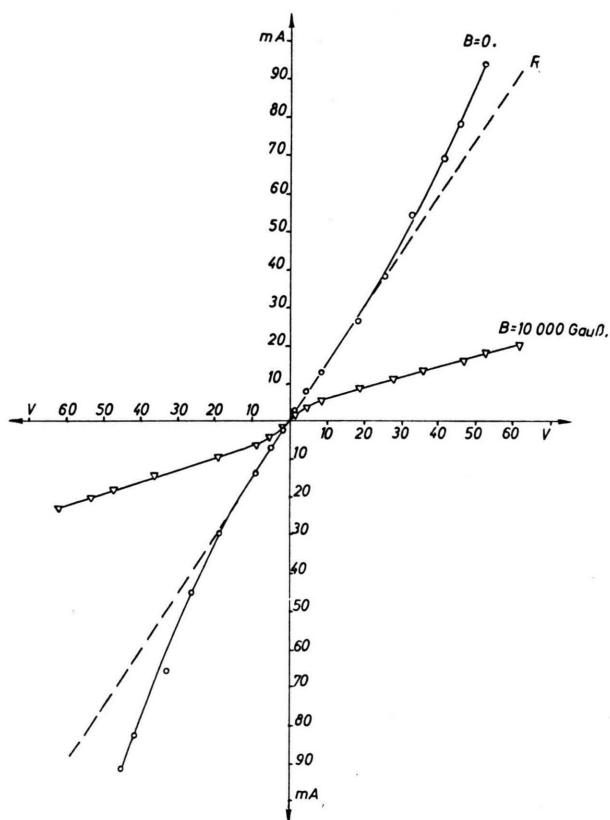


Abb. 3. Symmetrische magnetische Sperrschicht (Probe 2).

Kennlinie im Magnetfeld auf Abweichung von der Eigenleitung zurückzuführen ist.) Dies läßt sich verstehen auf Grund von weiteren Messungen von Many<sup>6</sup>, bei denen die Temperaturabhängigkeit des Injektionsverhältnisses (Verhältnis von injiziertem Strom zum Gesamtstrom) bestimmt wurde. Es findet nach tieferen Temperaturen hin ein

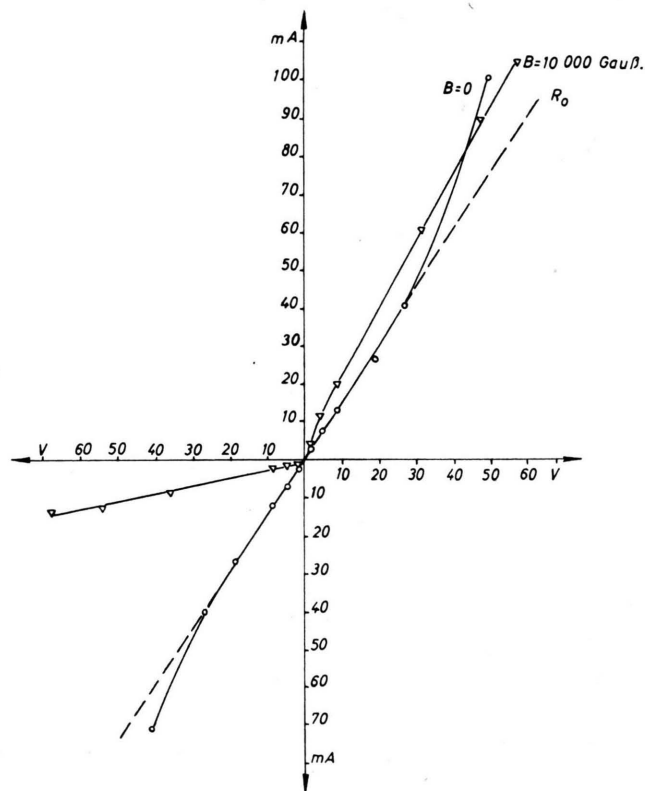


Abb. 4. Unsymmetrische magnetische Sperrschicht (Probe 2a).

bei einer Lebensdauer von  $\tau = 140 \mu\text{sec}$ . Der Widerstand im Magnetfeld ist hierbei etwa  $7 \cdot R_0$  bei 50 V.

Bei dieser Probe wurde der unsymmetrische Fall nach der unter 1. beschriebenen Methode durch nachträgliches Schleifen einer Breitseite realisiert. Diese unterschiedliche Oberflächenbeschaffenheit hat eine unsymmetrische Kennlinie zur Folge, wie sie in Abb. 4 dargestellt ist.

<sup>5</sup> A. Many, Proc. Phys. Soc., Lond. **67**, 9 [1954].

<sup>6</sup> A. Many, Physica **20**, 985 [1954].

Es zeigt sich, daß der Anstieg des Stromes in „Sperrrichtung“ derselbe ist, wie beim symmetrischen Fall in Abb. 3, jedoch ist der Absolutwert des Sperrstromes kleiner. Dies ist verständlich, wenn man beachtet, daß beim unsymmetrischen Fall infolge des hohen  $s$ -Wertes die Dichteüberhöhung an der Seite  $y = -b/2$  (vgl. <sup>2</sup>, Abb. 2 und 5) wegfällt.

In Flußrichtung bildet sich zunächst eine starke Überhöhung der Leitfähigkeit aus, die bei ca. 3 V 100% beträgt und nach größeren Feldstärken hin wieder abnimmt.

#### 4. Vergleich mit der Theorie

In der vorausgehenden Arbeit von Madelung, Tewordt und Welker<sup>7</sup> wurde in Gl. (18) der theoretische Ausdruck für die Strom-Spannungskennlinie der magnetischen Sperrschicht für den speziellen Fall der linearen Rekombination angegeben und in Abb. 2 und 3 Kennlinien für verschiedene Werte der Parameter  $\tau$ ,  $s$  und  $b$  aufgezeigt.

Um einen Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen zu ermöglichen, wurde die Größe  $\lambda$  [l. c.<sup>7</sup>, Gl. (18)] für die der Probe 2 entsprechenden Werte von  $s = S = 100$  cm/sec,  $\tau = 140$   $\mu$ sec und  $g = b/L \approx 1$  (symmetrischer Fall), bzw.  $s = 100$ ,  $S = 20000$  cm/sec (unsymmetrischer Fall) berechnet.

Die theoretischen Kennlinien sind in Abb. 5 zusammen mit den experimentellen Ergebnissen aufgetragen.

Beim Vergleich der beiden Kurven A und B der symmetrischen magnetischen Sperrschicht in Abb. 5a zeigt sich, daß der theoretisch geforderte Sättigungsstrom nicht auftritt. Dasselbe gilt für den unsymmetrischen Fall (Abb. 5b) in Sperrrichtung. Der experimentell beobachtete lineare Anstieg läßt sich jedoch dadurch erklären, daß die bei der theoretischen Behandlung gemachte Voraussetzung der reinen Eigenleitung, also  $n = p = n_i$  praktisch nicht voll erfüllt ist. Eine Temperaturanalyse der Leitfähigkeit und des Hall-Effektes des verwendeten Germaniums ergab einen Überschuß von ca.  $10^{13}$  Elektronen/cm<sup>3</sup>. Da durch die magnetische Sperrschicht nur Elektro-Loch-Paare aus dem Kristall ausgeräumt werden können, bleibt diese überschüssige Zahl von Elektronen übrig und bedingt den Ohmschen Anstieg des

Sperrstromes. Dies stimmt auch mit der Steilheit des Anstieges überein, die ebenfalls einer Elektronendichte von ca.  $10^{13}$  cm<sup>-3</sup> entspricht.

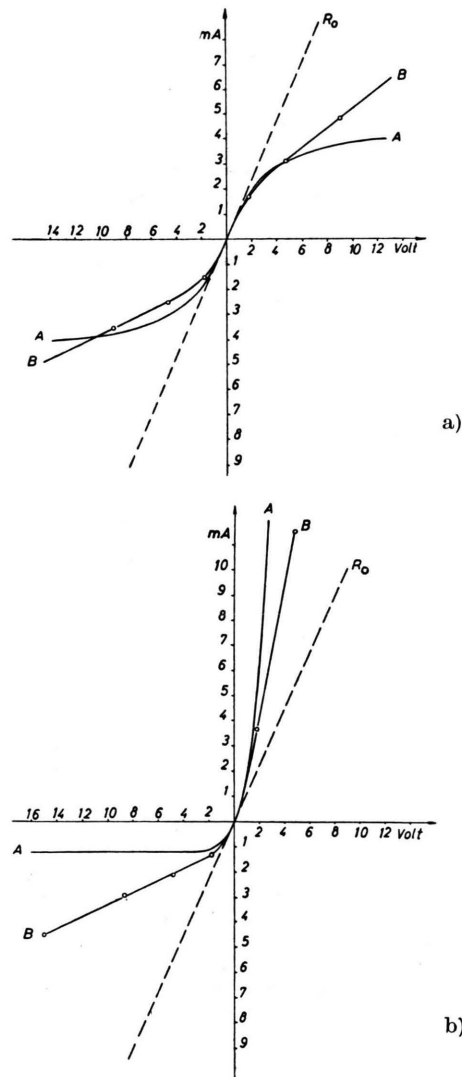


Abb. 5. Vergleich der theoretischen Kennlinien (A) mit dem experimentellen Verlauf (B); a) symmetrisch, b) unsymmetrisch.

Bei der unsymmetrischen Kennlinie (Abb. 5b) zeigt sich außer der eben behandelten Abweichung in Sperrrichtung, daß in Flußrichtung die Dichteüberhöhung praktisch wesentlich kleiner ist als der theoretische Verlauf angibt. Dieser Effekt wird aber in der vorangehenden Arbeit (l. c.<sup>7</sup>, Anhang 3) ausführlich besprochen. Er beruht darauf, daß die bei der expliziten Ausrechnung von  $\lambda$  [l. c.<sup>7</sup>, Gln. (17) und (18)] gemachte Voraussetzung der linearen

<sup>7</sup> O. Madelung, L. Tewordt u. H. Welker, Z. Naturforsch. **10a**, 476 [1955].

Rekombination für die großen Dichteabweichungen bei der unsymmetrischen magnetischen Sperrschicht nicht mehr gerechtfertigt ist.

## II. Nichtstationäres Verhalten der magnetischen Sperrschicht

### 1. Zeitlicher Abbau

Rekombination bzw. Neuerzeugung von Ladungsträgern und Diffusionskräfte bewirken eine Wiederherstellung der Gleichgewichtsdichte, sobald eines der die magnetische Sperrschicht aufbauenden Felder  $E_x$  bzw.  $B_z$  abgeschaltet wird.

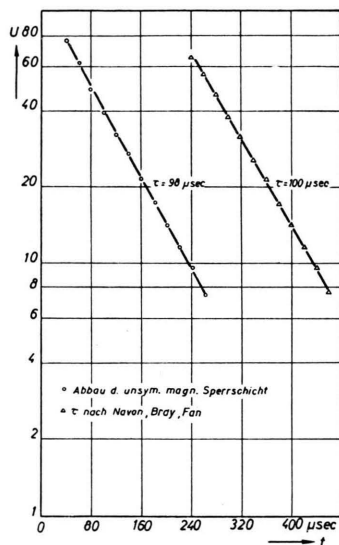


Abb. 6. Zeitlicher Abbau einer symmetrischen magnetischen Sperrschicht im Vergleich zu einer gewöhnlichen  $\tau$ -Kurve derselben Probe. Die Spannung  $U$  als Maß für die Leitfähigkeitsänderung müßte hier für den Abbau der Sperrschicht das entgegengesetzte Vorzeichen gegenüber dem der  $\tau$ -Kurve aufweisen, da es sich um den Abbau einer Verarmung an Ladungsträgern handelt.

Beim symmetrischen Fall führt der Dichteausgleich durch Diffusion vom Anreicherungsgebiet in das Verarmungsgebiet zwar zu einer homogenen Verteilung der Ladungsträger, trägt jedoch zu keiner Änderung der Leitfähigkeit bei. Die für die Wiedereinstellung des Gleichgewichtes benötigte Zeit wird also hierbei allein gegeben durch Rekombination bzw. Paarерzeugung im Innern des Kristalls und an der Oberfläche, so daß die Zeitkonstante für den zeitlichen Abbau mit der Lebensdauer  $\tau$  übereinstimmen muß. Dieses Ergebnis zeigt auch Abb. 6. Dort ist aufgetragen

der zeitliche Verlauf einer Spannung  $U$  als Maß für die Leitfähigkeitsänderung einer Probe mit allseitig geätzten Oberflächen nach Abschaltung des elektrischen Feldes und zum Vergleich eine nach <sup>4</sup> gemessene  $\tau$ -Kurve. (Die Meßmethode zur Bestimmung des zeitlichen Abbaus entspricht genau der der  $\tau$ -Messung nur mit dem Unterschied, daß sich die Probe in einem Magnetfeld befindet.) Der zeitliche Abbau einer symmetrischen magnetischen Sperrschicht stellt demnach eine Meßmöglichkeit der Lebensdauer in eigenleitendem Germanium dar, die gegenüber den üblichen Methoden den Vorteil einer wesentlich größeren Widerstandsänderung aufweist und somit größere Meßspannungen liefert.

Bei einer unsymmetrischen magnetischen Sperrschicht (betrachtet sei hier die Verarmungsrichtung) erfolgt im Gegensatz zur symmetrischen die Wiedereinstellung des Gleichgewichtes außer durch Paarерzeugung durch Diffusion von der Seite mit großer Rekombinationsgeschwindigkeit  $S$  nach der Verarmungsseite hin. Nach [l. c. <sup>7</sup>, Gl. (31)] wird die Zeitkonstante  $\tau'$  für diesen Abbau (für den Spezialfall  $s = 0$ ,  $S = \infty$ ) beschrieben durch:

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_b},$$

wobei  $\tau_v$  die Volumenrekombination und  $1/\tau_b = \pi^2 D/4b^2$  die durch Diffusion bedingte Abklingzeit bedeutet. ( $D$  = Diffusionskonstante,  $b$  = Dicke der Probe in  $y$ -Richtung.)

In Abb. 7 ist der zeitliche Abbau zweier Proben mit unsymmetrischen Oberflächen aufgezeigt. Mit den für diese Proben gültigen Werten von  $\tau$  und  $b$  ergibt sich nach obiger Beziehung  $\tau'$  zu:

$$\text{Probe 2a: } \tau' = 40 \mu\text{sec}, \quad \tau'_{\text{exp.}} = 35 \mu\text{sec},$$

$$\text{Probe 3a: } \tau' = 30 \mu\text{sec}, \quad \tau'_{\text{exp.}} = 26 \mu\text{sec}.$$

Die direkt gemessenen Werte  $\tau'_{\text{exp.}}$  sind etwas kleiner als die berechneten, was dadurch zu erklären ist, daß letztere für den unsymmetrischen Grenzfall mit  $s = 0$  und  $S = \infty$  gültig sind, während praktisch an der Verarmungsseite mit  $s = 100 \text{ cm/sec}$  ebenfalls Ladungsträger erzeugt werden und somit ein schnellerer Dichteausgleich erfolgt.

### 2. Zeitlicher Aufbau

Die Dauer des zeitlichen Aufbaus einer magnetischen Sperrschicht nach momentanem Einschalten des elektrischen Feldes  $E_x$  an einer im konstanten Magnetfeld befindlichen Probe läßt



sich anschaulich folgendermaßen erklären: Die Ladungsträger benötigen eine gewisse Zeit zur Durchquerung des Kristalls, um dann an der gegenüberliegenden Oberfläche zu rekombinieren, oder, falls die Lebensdauer im Volumen kleiner ist als die für das Durchqueren benötigte Zeit, bis das Elektron-Lochpaar im Innern rekombiniert. Daraus ist ersichtlich, daß bei gegebener Beweglichkeit der Paare die Dimension der Probe  $b$  und deren Volumenlebensdauer bestimmend sind für die Dauer des zeitlichen Aufbaus der magnetischen Sperrschicht.

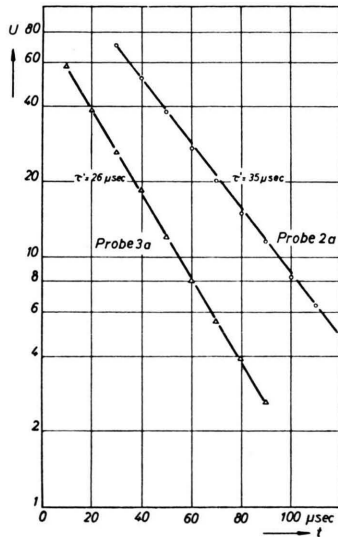


Abb. 7. Zeitlicher Abbau unsymmetrischer magnetischer Sperrschichten.

Den zeitlichen Verlauf des Stromes beim Aufbau der in Abb. 4 gezeigten unsymmetrischen Sperrschicht stellt Abb. 8 dar. Die Messung des zeitlichen Aufbaus wurde mit der unter (I, 1) beschriebenen Impulsmethode zur Kennlinienmessung durchgeführt. Die Impulsspannung war bei dem angegebenen Beispiel 10 Volt bei  $B = 9000$  Gauß. Es zeigt sich, daß bei diesen Feldern die magnetische Sperrschicht nach etwa  $14 \mu\text{sec}$  bereits vollständig aufgebaut ist, also ihren stationären Wert erreicht hat. Definiert man als Aufbauzeit  $T_A$  diejenige Zeit, die vergangen ist, bis der Strom den halben Wert der Gesamtänderung erreicht hat, also  $I_{TA} = 1/2 \cdot (I_{t=0} + I_{\text{stat.}})$ , so ergibt sich bei dem Beispiel in Abb. 8 eine Aufbauzeit von  $T_A = 5 \mu\text{sec}$ .

In der vorangehenden Arbeit [l. c. 7, Gl. (46); Abb. 4] ist der theoretische Verlauf des zeitlichen

Aufbaus der Dichteverteilung für kleine Felder (für den unsymmetrischen Fall  $s = 0$ ,  $S = \infty$ ) angegeben. Mit den für die Probe 2a charakteristischen Werten von  $g = 1$  und  $\tau = 140 \mu\text{sec}$  wurde die dort angegebene Formel für die Dichteverteilung (Gl. 46) ausgewertet und das Ergebnis graphisch integriert. Das Resultat dieser Berechnung

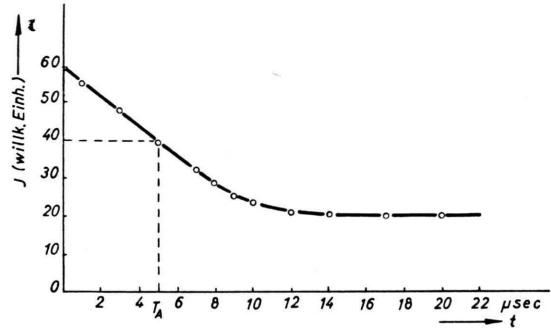


Abb. 8. Zeitlicher Aufbau einer unsymmetrischen Sperrschicht (Probe 2a). Die durch den Verstärker bedingte Anstiegszeit von ca.  $0,5 \mu\text{s}$  ist nicht eingezeichnet; der Stromwert zur Zeit  $t = 0$  wurde durch Extrapolation ermittelt.

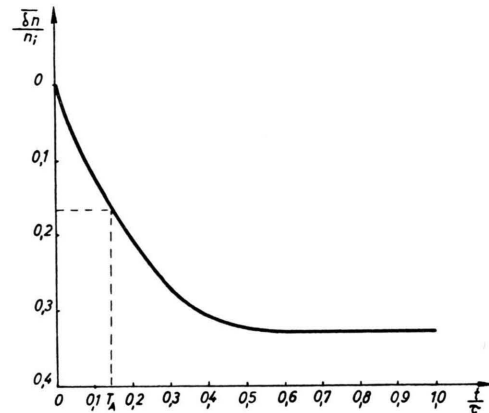


Abb. 9. Theoretischer Verlauf des zeitlichen Aufbaus.

zeigt Abb. 9. Die Stromänderung erreicht ihren halben Wert bei  $t/\tau = 0,14$ , es ergibt sich somit eine Aufbauzeit  $T_A = 0,14 \cdot \tau = 20 \mu\text{sec}$ . Dieser Wert ist wesentlich größer als der experimentell bestimmte, was sich aus der Tatsache erklärt, daß seine Gültigkeit sich nur auf kleine Felder beschränkt. Für diesen Fall ist die oben definierte Aufbauzeit konstant. Bei den praktisch verwendeten Feldstärken von  $E_x B_z = 10^4$  bis  $10^5 \text{ V/cm} \times \text{Gauß}$  ergibt sich jedoch eine Feldabhängigkeit dieser Aufbauzeit und zwar ist für den angegebenen Bereich  $T_A \sim 1/E_x B_z$ . Dieses Ergebnis wurde erhalten aus der Messung der Aufbauzeit bei ver-

schiedenen Spannungen und Magnetfeldern. Die Meßwerte für die Probe 2a sind in Abb. 10 aufgetragen. Bei kleinen Feldstärken nähert sich  $T_A$  dem theoretischen Grenzwert.

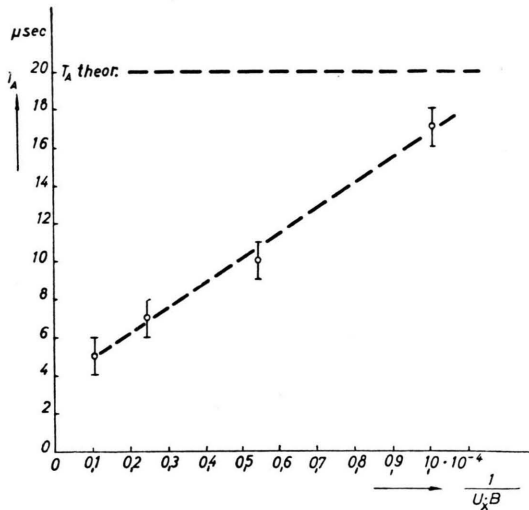


Abb. 10. Abhängigkeit der Aufbauzeit  $T_A$  von den angelegten Feldern  $1/U_x B_z$  [Volt $^{-1}$  · Gauß $^{-1}$ ].

### 3. Frequenzabhängigkeit

Nach den beiden vorangegangenen Kapiteln über den zeitlichen Auf- und Abbau der magnetischen Sperrschicht ist es verständlich, daß beim Anlegen eines Wechselfeldes von einer gewissen Frequenz ab die Ladungsträger diesem Wechselfeld nicht mehr folgen können und somit auch keine Sperrschicht mehr gebildet werden

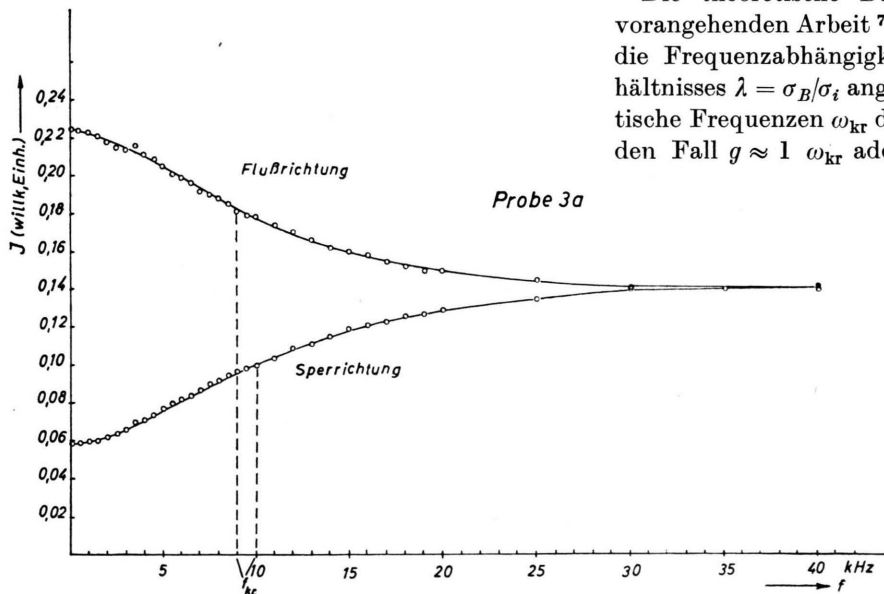


Abb. 11. Frequenzabhängigkeit des Fluß- bzw.-Sperrstromes einer unsymmetrischen magnetischen Sperrschicht (Probe 3a). Die angelegte Spannung war 5 Volt bei 10000 Gauß.

kann. Bei niedrigen Frequenzen ( $1/\omega \gg T_A$ ;  $\tau$ ) entspricht die auftretende Verarmung bzw. Anreicherung von Ladungsträgern dem stationären Verhalten.

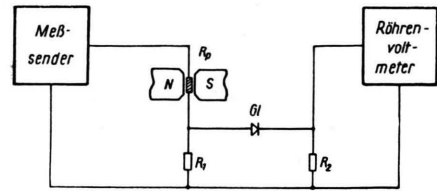


Abb. 12. Prinzip der Schaltung zur Messung der Frequenzabhängigkeit.

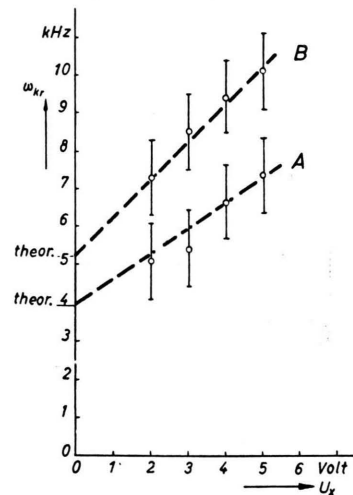


Abb. 13. Abhängigkeit der kritischen Frequenz von der angelegten Spannung.

Die theoretische Berechnung ist wieder der vorangehenden Arbeit<sup>7</sup> entnommen, wo in Gl. (53) die Frequenzabhängigkeit des Leitfähigkeitsverhältnisses  $\lambda = \sigma_B/\sigma_i$  angegeben ist. Es werden kritische Frequenzen  $\omega_{kr}$  definiert, wobei speziell für den Fall  $g \approx 1$   $\omega_{kr}$  additiv zusammengesetzt ist

aus  $\omega_\tau + \omega_b$ , wobei  $\omega_\tau = 1/\tau$  und  $\omega_b = 2D/b^2$  ist. Eine Berechnung des Mittelwertes des Stromes durch die Probe (gemittelt über eine Halbperiode) zeigte, daß der Verlauf des mittleren Stromes in Abhängigkeit von der Frequenz im wesentlichen durch  $S_1$  (vgl. 7, Abb. 5) beschrieben wird.

Zu dem gleichen Ergebnis führte die Messung der Frequenzabhängigkeit (Abb. 11), die nach dem in Abb. 12 gezeigten Prinzip gemessen wurde. Die Einschaltung eines Gleichrichters Gl zur Trennung der Anreicherungsphase von der Verarmungsphase war notwendig, weil bei den hierbei anwendbaren Spannungen von 2 bis 5 Volt die Dichteüberhöhung etwa gerade so groß ist wie die Verarmung (vgl. Abb. 4), so daß bei Mittelung über eine ganze

Periode, wie sie vom Röhrenvoltmeter durchgeführt wird, nur sehr kleine Stromänderungen feststellbar wären. Die kritische Frequenz  $\omega_{kr}$  ist bei dem angeführten Beispiel im Mittel 9,5 kHz. Die Abhängigkeit dieser kritischen Frequenz von der angelegten Wechselspannung für die Proben 2a und 3a zeigt Abb. 13. Die Kurven sind dabei so durch die Meßpunkte gelegt, daß sie für  $U = 0$  in den aus  $\omega_\tau = 1/\tau$  und  $\omega_b = 2D/b^2$  (vgl. II, 1) berechneten theoretischen Wert einmünden.

Herrn Prof. Welker bin ich für zahlreiche Anregungen und Diskussionen zu großem Dank verpflichtet, ferner danke ich Herrn Dr. A. Hoffmann für die zur Verfügung gestellten Germanium-Einkristalle und Herrn Dr. Weiß für die Überlassung der Ergebnisse der Leitfähigkeits- und Hall-Effektmessungen.

## NOTIZEN

### Näherungsweise Integration der Elenbaas-Hellerschen Differentialgleichung

Von G. Schmitz und K. Schick

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. 10a, 495 [1955]; eingegangen am 17. Mai 1955)

Die Energiebilanz eines wandstabilisierten Lichtbogens, die im stationären Fall die zur Wand abgeleitete Wärmeleistung gleich der um die Abstrahlung verminderten Stromleistung setzt, läßt sich immer auf eine Differentialgleichung der allgemeinen Form

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + C_1 f_1(y) + C_2 f_2(y) = 0 \quad (1)$$

(Elenbaas - Hellersche Differentialgleichung) bringen.  $C_1$  und  $C_2$  sind Konstanten,  $f_1(y)$  und  $f_2(y)$  Funktionen der abhängigen Veränderlichen  $y$ . Die Randbedingungen für die Differentialgleichung (1) lauten:

$$x = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0; \quad x = 1; \quad y = y_1 = \text{const.}$$

Durch die quadratische Substitution  $u = (C_1/4)x^2$  läßt sich (1) auf ein Anfangswertproblem transformieren<sup>1, 2</sup>. Mit  $C_2/C_1 = k$  erhält man

$$\frac{d}{du} \left( u \frac{dy}{du} \right) + f_1(y) + k f_2(y) = 0 \quad (2)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$u = 0, \quad y = y_0; \quad d y / d u = -f_1(y_0) - k f_2(y_0).$$

An der Stelle  $y = y_1$  ergibt sich  $4u_1 = C_1$ .

Eine Möglichkeit, die Gl. (2) näherungsweise zu integrieren, erhalten wir, wenn wir die Funktion  $-f_1(y) - k f_2(y)$  durch einen Streckenzug approximieren.

<sup>1</sup> G. Schmitz, Phys. Z. 44, 129 [1943].

<sup>2</sup> G. Schmitz u. W. Hecker, Z. Phys. 129, 104 [1951].

Für ein einzelnes Geradenstück ergibt sich an Stelle der Gl. (2)

$$(xy')' = A + By;$$

$A$  und  $B$  sind Konstanten, die passend zu wählen sind. Aus der Substitution  $A + By = t$  folgt  $y' = (1/B)t'$  und

$$(xt')' = Bt.$$

Die Substitution  $x = (-1/4B)\xi^2$  liefert  $t' = (-2B/\xi)\dot{\xi}$ , wenn wir die Ableitung nach  $\xi$  mit einem Punkt bezeichnen. Da

$$xt' = \frac{1}{2} \xi \dot{\xi}$$

ist, ergibt sich für

$$(xt')' = -B \left( \dot{\xi} + \frac{\ddot{\xi}}{\xi} \right) = Bt$$

und für  $t$  die Differentialgleichung

$$\ddot{\xi} + \frac{\dot{\xi}}{\xi} + t = 0.$$

Das ist aber eine Besselsche Differentialgleichung vom Typus

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad \text{für } n = 0.$$

Die Lösung für  $t$  lautet:

$$t = \alpha I_0(\xi) + \beta N_0(\xi),$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Konstanten sind und  $I_0$  und  $N_0$  die Besselsche bzw. Neumannsche Funktion mit dem Parameter  $n = 0$  ist. Mit  $\alpha^* = \alpha/B$  und  $\beta^* = \beta/B$  ergibt sich für  $y$  in dem betrachteten Intervall die Funktion

$$y = -\frac{A}{B} + \alpha^* I_0(\xi) + \beta^* N_0(\xi),$$

für das  $n$ -te Intervall lautet diese Beziehung

$$y_n = -\frac{A_n}{B_n} + \alpha_n^* I_0 + \beta_n^* N_0.$$

Die Konstanten  $\alpha_n^*$  und  $\beta_n^*$  bestimmen sich aus der Bedingung, daß  $y$  und  $\dot{y}$  stetig sein müssen.